Protokollrichtlinien und Fehlerrechnung

Gemeinsames Meteorologisches Praktikum im Bachelor-Studiengang
„Geophysik und Meteorologie“ der Universitäten Köln und Bonn
Stand: April 2012

1. Allgemeines

- Aktuelle Informationen, Termine und Material zum Praktikum finden Sie unter: http://www.geomet.uni-koeln.de/allgemein/studium/
- Zur erfolgreichen Versuchsvorbereitung gehören:
  - das Beachten der Hinweise in diesem Dokument
  - das Erlernen der theoretischen Grundlangen mit Hilfe der Versuchsbeschreibung und gängiger Lehrbücher (s. Einführungsvorlesung)
  - das Erlernen der Versuchsdurchführung
  - die Lektüre der Gerätebeschreibungen aller im Versuch verwendeten Messgeräte, sofern verfügbar
- Die Messbedingungen sollten ausführlich beschrieben werden. Erwarten Sie fehlerhafte Messungen? Während des Versuchs werden alle gemessenen Werte zusammen mit ihren Einheiten und der Uhrzeit in UTC für das Protokoll notiert. Jeder gemessene Wert muss mit einer nachvollziehbaren Fehlerabschätzung versehen werden. Bei **jeder** Messung liest **jeder** Teilnehmer einmal ab, auch wenn dies in der jeweiligen Versuchsbeschreibung nicht explizit erwähnt ist. Die Tabellen für die Messreihen sollten bereits vorbereitet sein. Das erspart Zeit am Tag der Versuchsdurchführung.
- Zu jedem Versuch muss ein mit einem Textverarbeitungsprogramm gestaltetes Protokoll abgegeben werden. Dazu stehen die Computer in den CIP-Räumen des jeweiligen Instituts zur Verfügung. Die Auswertung ist innerhalb der vereinbarten Zeit nach Versuchsdurchführung beim Versuchsleiter abzugeben. Bewertet werden: Beschreibung von Theorie und Versuchszielen, Durchführung der Messungen, Rechenweg, Fehlerrechnung, Ergebnis, Form und Sprache.

2. Protokollaufbau

Das Versuchsprotokoll sollte selbsterklärend sein, d.h. die Ausarbeitung muss auch ohne die Versuchsbeschreibung in sich eine konsistente Einheit bilden. Bitte beachten Sie dabei, dass stichwortartige Ausführungen nicht zulässig sind, sondern zusammenhängende Formulierungen verpflichtend sind. Vermeiden Sie umgangssprachliche Ausdrücke. Folgende Elemente sollte das Protokoll enthalten:

a. **Deckblatt**: Versuch, Gruppennummer und Namen der Gruppenmitglieder, Name des Versuchsleiters, Datum der Versuchsdurchführung, Datum der Abgabe der Auswertung

b. **Ziele** des Versuches

c. **Theorie & Aufgabenstellungen**: Das Protokoll enthält eine knappe Zusammenfassung mit der für den Versuch relevanten Theorie mit Formeln (max. eine Seite), außerdem eine Beschreibung der Aufgabenstellungen. Formeln werden in den Text integriert, wobei alle Variablen definiert werden müssen.

d. Beschreibung der **Versuchsdurchführung**: Was wurde wann, wo und unter welchen Bedingungen wurde abgelesen? Welche Fehlerquellen wurden identifiziert? Handschriftliche Originalaufzeichnungen müssen im Anhang des Protokolls platziert werden.

e. Die **Auswertung** enthält Berechnungen aus den gemessenen Werten und Lösung der allgemeinen Aufgaben. Bei beiden Berechnungen sollte der Rechenweg nachvollziehbar sein (d.h. „es fallen kein Zahlen vom Himmel“). Graphiken sollten möglichst per Computer erstellt und in das Protokoll mit eingebunden werden. Achten Sie darauf, dass Abbildungen und Tabellen mit Unter- bzw. Überschrift versehen werden. Die erste Zeile einer Tabelle enthält Informationen welche Variablen in welchen Einheiten eingetragen sind. In allen Abbildungen steht an jeder Achse die dargestellte Größe mit zugehöriger Einheit. Abbildungen, Tabellen und Resultate sollten im Zusammenhang mit der Theorie im Text diskutiert werden. Da ein Messwert/Ergebnis ohne die Angabe eines Fehlers sinnlos ist, sollte eine sorgfältige Fehlerrechung mit anschließender Diskussion enthalten sein. Gerade hier muss auch der Rechenweg nachvollziehbar sein. Aufgaben, die sich nicht auf die gemessenen Ergebnisse beziehen, kann man schon vorher lösen.

a. **Abschließende Bemerkungen**: besondere Schwierigkeiten, Begründung von nicht vertrauenswürdigen Ergebnissen, wenn nötig: Kritik und Anregungen zum Versuch

3. Fehlerrechnung

Alle Messungen unterliegen *systematischen* und *zufälligen* (bzw. statistischen) Fehlern. Die systematischen Fehler entstehen z.B. durch falsch geeichte Messgeräte oder ungeeignete Messverfahren und können nur durch kritische Analyse abgeschätzt und evtl. behoben werden. Prinzipiell können sie zwar bei Kenntnis der Fehlerquellen eliminiert oder korrigiert werden, in der Praxis stellen sie jedoch die größte Unsicherheit da. Ein systematischer Fehler kann in der Regel mit einem bestimmten Vorzeichen (+ oder -) angegeben werden.

Zufällige Fehler stellen statistische, voneinander unabhängige Schwankungen der Messgröße dar. Sie entstehen z.B. aus der Ungenauigkeit der Ablesung und durch nicht vermeidbare Schwankungen bei der Herstellung einzelner Geräte desselben Typs. Zufällige Fehler, z.B. durch ungenaues Ablesen, werden deutlich, wenn man die Messung mehrfach (unabhängig!) durchführt: Die Einzelmessungen stimmen i.a. nicht überein, obwohl sich die Versuchs-Bedingungen nicht geändert haben (Stationarität). Theoretisch sollte solch ein Fehler durch eine große Anzahl von Wiederholungen beliebig reduziert werden können. In der Praxis werden solche Fehler, die z.B. durch die mangelnde Sensitivität eines Detektors entstehen, durch längere Integrationszeiten reduziert. Im Einzelfall kann über das Vorzeichen keine Aussage gemacht werden, daher werden zufällige Fehler i.d.R. mit ± versehen.

Als besten Schätzwert für den wahren Wert einer Größe wird gewöhnlich das *arithmetische Mittel* angesehen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.1)$$

mit: x_i einzelne Messwerte
n Anzahl der Messungen
$\bar{x}$ Mittelwert

Damit ist die Abweichung der einzelnen Werte vom Mittelwert:

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i \qquad (3.2)$$

Ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert ist die Varianz σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (3.3)$$

Die positive Wurzel aus der Varianz, also σ, wird als *Standardabweichung* oder besser bei Gebrauch für Messunsicherheiten als *Standardunsicherheit u* bezeichnet. Sie definiert den mittleren absoluten Fehler der Einzelwerte einer Messreihe. Der dimensionslose *relative Fehler* ist gegeben durch $\sigma/\bar{x}$ und wird meistens durch Multiplikation mit 100 in Prozent angegeben.

4. Fehlerfortpflanzung

Wird die gesuchte physikalische Größe aus Messwerten von verschiedenen anderen Größen errechnet, so gehen diese mit ihren Fehlern in die Berechnung des Ergebnisses ein. Im ungünstigsten Fall (a) kann keine Aussage über die Fehlercharakteristik gemacht werden und es muss davon ausgegangen werden, dass die Einzelfehler alle gleichsinnig wirken können und somit den Endfehler verstärken. Im Einzelfall ist darüber wegen der zufälligen Natur dieser Fehler keine Aussage möglich. Es kann aber auch sein, dass (b) die Einzelfehler voneinander unabhängig und in ihrer Charakteristik zufällig sind. Das heißt dann auch, dass ihre Wirkung auf den Endfehler zufällig gegensinnig ist.

a) Zur Berechnung des *Maximalfehlers* (auch absoluter Fehler genannt) betrachten wir eine Größe y, die eine Funktion von n Parametern x_i darstellt (y = f($x_1, x_2, \ldots x_n$)). Wenn gilt, dass die Fehler der einzelnen Parameter klein sind ($\Delta x_i << x_i$), folgt analytisch aus einer Reihenentwicklung nach Taylor

$$\Delta y = \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \ldots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \qquad (4.1)$$

Die partiellen Ableitungen von f nach der Variablen x_i haben die physikalische Bedeutung einer Empfindlichkeit. Ist y unempfindlich gegenüber einer Änderung der Eingangsgröße x_i, dann ist die partielle Ableitung von f nach x_i dem Betrage nach klein. Es werden die Absolutwerte der partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ betrachtet, da die ungünstigste Kombination der Einzelfehler, nämlich dass alle Fehler in die gleiche Richtung wirken, angenommen wird. Diese Fehlerabschätzung erlaubt die Angabe, dass der gesuchte wahre Wert im Intervall [$\bar{y}$ -Δy, $\bar{y}$ +Δy] zu finden ist.

b) Für den zweiten Fall wird ein *mittlerer absoluter Fehler* des Endergebnisses nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet: Nehmen wir an, dass y nur von zwei Parametern x_1 und x_2 abhängt. Dann gilt für den Mittelwert $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ für die Standardunsicherheit:

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 u_{x1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 u_{x2}^2} \qquad (4.2)$$

wobei die einzelnen Unsicherheiten u^2_{x1} und u^2_{x2} den Varianzen in (3.3) entsprechen.

5. Beispiel zur Fehlerrechnung

Als Beispiel zur Fehlerrechnung soll die Bestimmung des Luftdrucks aus der Barometerablesung p_b [hPa] unter Berücksichtigung der temperaturabhängigen Ausdehnung des Quecksilbers durchgeführt werden. Dabei gilt:

$$p = p_b - \alpha \cdot \vartheta \cdot p_b \qquad (5.1)$$

mit ϑ - Temperatur am Thermometer des Barometers in °C
α - thermischer Ausdehnungskoeffizient des Quecksilber (= 1.63 10^{-4} °C^{-1})

Tabelle 4.1. 10-maliges Ablesen des Quecksilberbarometer sowie des Thermometers

Beobachter [n]	**ϑ [°C]**	**p_b [hPa]**
1	23.5	1006.2
2	23.6	1006.5
3	23.3	1005.9
4	23.5	1006.0
5	23.7	1006.3
6	23.4	1006.6
7	23.6	1006.2
8	23.5	1006.0
9	23.4	1006.2
10	23.5	1006.3

Da die Messungen nicht übereinstimmen, wird der Mittelwert als beste Schätzung des wahren Wertes berechnet:

$$\overline{p_b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{bi} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} p_{bi} = 1006.22\ hPa \tag{5.2}$$

Die Standardabweichung unter Verwendung des nicht gerundeten Mittelwerts von 1006.22 hPa ergibt sich zu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(p_{bi} - \overline{p_{bi}})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(p_{bi} - \overline{p_{bi}})^2} = 0.22\ hPa \tag{5.3}$$

Somit ergibt sich: $\boldsymbol{p_b}$ **= 1006.2 ± 0.2 hPa**. Analog folgt für die Temperatur $\boldsymbol{\vartheta}$ **= 23.5 ± 0.1 °C.** Der tatsächliche Luftdruck ist somit:

$$p = p_b - \alpha \cdot \vartheta \cdot p_b = 1006.2 - 3.82 \text{ hPa} = 1002.4 \text{ hPa} \tag{5.4}$$

Der *absolute Größtfehler* folgt aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz mit Δp_b = 0.22 hPa und $\Delta\vartheta$ = 0.1 °C entsprechend (4.1):

$$\Delta p = \left|\frac{\partial p}{\partial p_b}\right| \Delta p_b + \left|\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right| \Delta\vartheta = |1-\alpha\cdot\vartheta|\, \Delta p_b + |-\alpha\cdot p_b|\, \Delta\vartheta = 0.24\ hPa \tag{5.5}$$

Dabei zeigt sich der zu vernachlässigende Temperaturfehler und es folgt $\boldsymbol{p}$ **= 1002.4 ± 0.2 hPa,** entsprechend einem relativen Fehler von 0.2 Promille. Bei Ablesungen mehrerer Beobachter kann von einem zufälligen Fehler ausgegangen werden und der mittlere absolute Fehler mittels (4.2) berechnet werden, der nur 0.05 hPa beträgt.

5. Bestimmung einer Ausgleichsgeraden

Häufig ist die gemessene Größe eine lineare Funktion einer Variablen (z.B. ist der Widerstand von Metallen eine lineare Funktion der Temperatur). Somit ergeben sich Wertepaare (x_i, y_i), aus denen ein linearer Zusammenhang, die sogenannte Ausgleichsgerade der Form

$$y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}\, x + \mathrm{b} \tag{5.1}$$

bestimmt werden soll. Zur optimalen Anpassung wird das *Prinzip der kleinsten Quadrate* nach Gauß angewandt, d.h. die Gerade ist so zu legen, dass die Summe der Quadrate aller Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein ist. Als Abstand nimmt man den vertikalen (in *y*- Richtung gemessenen) Abstand von der Geraden. Das impliziert, dass die *x*-Werte als fehlerfrei angenommen werden. Daher wird die hier vorgestellte lineare Regression auch als einseitige *lineare Regression* bezeichnet. Zur Berechnung der Parameter a,b der Ausgleichsgerade muss (5.2) minimiert werden:

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - a\cdot x \ + b\right]^2 \rightarrow \min \tag{5.2}$$

Damit Q ein lokales Minimum erreicht, müssen die Ableitungen von Q nach allen Parametern (a,b) verschwinden:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \ \ und \ \ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \tag{5.3}$$

Diese Bedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem für die Parameter *a* und *b* mit den Lösungen:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad\qquad b = \bar{y} - a\cdot\bar{x} \tag{5.4}$$

Daraus folgt, dass die Gerade immer durch Punkt der Mittelwerte von *x,y* führt. Die Kovarianz σ_{xy}= 1/(n-1)·∑x_i'y_i' ergibt sich aus den Abweichungen $x_i' = x_i - \bar{x}$ und $y_i' = y_i - \bar{y}$. Aus der Kovarianz (5.5) und den Varianzen von *x* und *y* kann der Korrelationskoeffizient *r* berechnet werden (5.6), der Werte zwischen -1 und +1 annehmen kann. Ein Wert von +1 zeigt einen idealen linearen Zusammenhang an.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)\right] \tag{5.5}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{5.6}$$

Zur Bestimmung der Unsicherheit der Regressionsgeraden gibt man nicht die Standardabweichung der Steigung an sondern ein Vertrauensintervall aus den Werten der Stichprobe.

6. Messwerterfassung

Bei der einfachsten Art der Messwerterfassung besteht die Beobachtung im direkten *Ablesen* (per Auge) des Messgeräts Die Ablesegenauigkeit wird dabei durch die Skaleneinteilung des Instruments vorgegeben. Generell liegt eine Beobachtung zwischen zwei Skalenteilen des Abstandes Δ. Unter der Annahme, dass der Messwert mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden dazwischen liegenden Wert annehmen kann, so liegt eine Rechteckverteilung der Breite Δ vor. Die Varianz dieser Verteilung ist $\Delta^2/12$ und die Standardunsicherheit ist in diesem Fall gleich $\Delta/\sqrt{12}$. Bei einer Einteilung von 0.1 hPa ergibt dies eine Unsicherheit von 0.029 hPa.

Für zeitlich kontinuierliche Beobachtungen ist das Ablesen durch einen menschlichen Beobachter ungeeignet. Daher wurden schon früh analoge Datenerfassungssysteme mit Schreiberaufzeichnung entwickelt. Solche *Registriergeräte* finden noch heute z.B. in Museen Verwendung. Im Praktikum wird exemplarisch ein Trommelschreiber zur Druckmessung (Barograph) genutzt. Dabei ist auf einer Grundplatte eine Achse angebracht, auf der sich eine Trommel (Durchmesser 93 mm) befindet. Die Trommel verfügt über ein Uhrwerk, das auf ein Zahnrad wirkt und so die Trommel dreht. Dabei gibt es Trommeln mit Umdrehungszeiten von 1 Stunde bis zu mehreren Monaten. Auf der Trommel wird ein Schreibstreifen eingelegt, der mit einem entsprechenden Liniennetz bedruckt ist. Ein Schreiber markiert kontinuierlich Werte über Übertragungsglieder auf dem Papier. Auf der x-Achse (Abszisse) befindet sich die Zeitachse, die auch kontrolliert werden sollte. Auf der Ordinate wird die Messgröße aufgetragen, wobei entsprechend der Bewegung der Trommel die Ordinate zu einem Zeitpunkt entlang eines Kreisbogens verläuft. Meist muss eine Kalibration der Ordinate vorgenommen werden.

Heutzutage haben *digitale Datenerfassungssysteme* die analogen weitgehend abgelöst. Hier wird das analoge Signal (z.B. Spannung oder Widerstand) in regelmäßigen Abständen abgetastet (Abtastfrequenz) und gespeichert. Dies wird entweder von einem so genannten Daten-Logger oder direkt von einem Computer mit entsprechender A/D-Wandlerkarte (Analog/Digital) durchgeführt. Die Abtastfrequenz muss an die im Messsignal vorhanden Frequenzen angepasst werden. Oft werden allerdings sehr hohe Abtastraten genutzt und das digitale System weiter verarbeitet (Tief-/Hochpass, Integration). Die Auflösung, in der die Messgröße dargestellt wird, ist typischerweise 12 bit. Logger haben unterschiedliche Speicherkapazitäten und können eine unterschiedliche Anzahl von Kanälen gleichzeitig aufnehmen. Über eine serielle Schnittstelle werden die Daten auf einen Computer übertragen.

7. Literatur

Bergmann-Schäfer: Experimentalphysik Bd. 1; Berlin; Verl. De Gruyter & Co;

Brock, F. V. und S. J. Richardson: Meteorological measurement systems, Oxford University Press, 2001.

DWD: Leitfaden für die Ausbildung im Deutschen Wetterdienst Nr. 6: Instrumentenkunde;

Foken, Th., Angewandte Meteorologie: Mikrometeorologische Methoden, Kapitel 6 Messtechnik, Springer Verlag, 282 Seiten, 2003

Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik; Berlin, Springer Verlag;

Hofmann, G.: Meteorologisches Instrumentenpraktikum; Wissenschaftliche Mitteilungen Nr. 5 der Universität München; Meteorologisches Institut München;

Kreyszig, E., Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoek & Ruprecht, 7. Auflage, 1998

Kohlrausch, F.: Praktische Physik; Bd. I, II; Stuttgart, Teubner-Verlag;

Liljeqist, G.H.: Allgemeine Meteorologie; Braunschweig; Verlag Vieweg;

Lindau, R., 2002: Rapport on Beaufort Equivalent Scales. Advances in the Applications of Marine Climatology - The Dynamic Part of the WMO Guide to the Applications of Marine Climatology. WMO/TD-No.1081, JCOMM Technical Report No.13.

Schönwiese, D.-D., Praktische Statistik für Meteorologen und Geowissenschaftler, Gebrüder Bormträger, Berlin-Stuttgart, 1992.

Walcher, W.:Praktikum der Physik; Teubner Studienbücher; Physik;

Westphal, W.H.: Physikalisches Praktikum; Braunschweig; Verlag Vieweg;